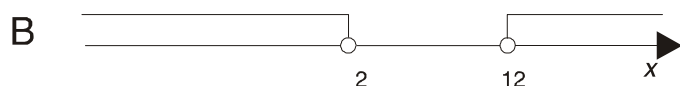


Matura z matematyki 2010 poziom podstawowy – rozwiązania.

Zadanie 1. (1 pkt)

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x + 7| > 5$.



roz. $|x + 7| > 5$
 $-5 > x + 7 > 5$
 $-12 > x > -2$



Zadanie 2. (1 pkt)

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł **B.** 180 zł C. 294 zł D. 420 zł

roz. x - cena spodni przed obniżką
 $y = 126$ - cena spodni po obniżce

$$\begin{aligned} y + 30\%x &= x \\ 126 + 30\%x &= x \\ 126 + 0,3x &= x \\ 126 &= 0,7x \\ x &= 180 \end{aligned}$$

Zadanie 3. (1 pkt)

Liczba $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa

A. 1 B. 4 C. 9 D. 36

Zadanie 4. (1 pkt)

Liczba $\log_4 8 + \log_4 2$ jest równa

A. 1 **B.** 2 C. $\log_4 6$ D. $\log_4 6$

roz. $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4(8 \cdot 2) = \log_4 16 = 2$

Zadanie 5. (1 pkt)

Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

- A. $5x^2 + 12x - 3$
 B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$
 C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$
 D. $4x^3 + 12x^2 - 3$

roz. $W(x) + P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3 + 2x^3 + 12x = 5x^2 + 12x - 3$

Zadanie 6. (1 pkt)

Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$ jest

- A. 1 B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{4}{7}$ D. 7

roz.
$$\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$$

$$5 \cdot (3x-1) = 2 \cdot (7x+1)$$

$$15x-5 = 14x+2$$

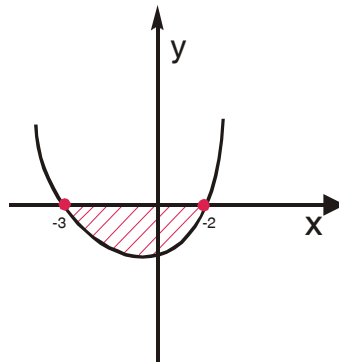
$$x=7$$

Zadanie 7. (1 pkt)

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba

- A. 9 B. 7 C. 4 D. 1

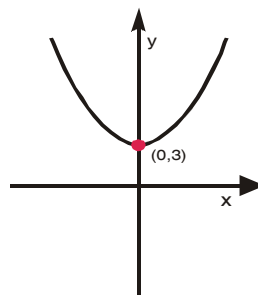
roz.

**Zadanie 8. (1 pkt)**

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie

- A. (3,0) B. (0,3) C. (-3,0) D. (0,-3)

roz. $\Delta = b^2 - 4ac = 36$; $(x_w, y_w) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, 3)$



Zadanie 9. (1 pkt)

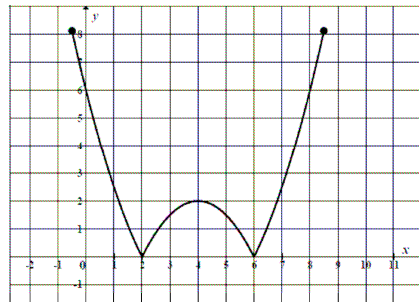
Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych oś Oy w punkcie $(0, 2)$. Wtedy

- A. $m = -\frac{2}{3}$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = \frac{5}{3}$

roz. $x=0; y=2$
 $2 = (-2) \cdot 0 + 3m + 3$
 $3m = -1$
 $m = -\frac{1}{3}$

Zadanie 10. (1 pkt)

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

- A. $f(x) = 0$ B. $f(x) = 1$ **C.** $f(x) = 2$ D. $f(x) = 3$

Zadanie 11. (1 pkt)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_7 jest równy

- A. 13 B. 0 **C.** -13 D. -26

Zadanie 12. (1 pkt)

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. 8 **B.** 2 C. $\frac{1}{8}$ D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 13. (1 pkt)

Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa

- A. 7 **B.** 14 C. 21 D. 28

roz. P_n – liczba przekątnych n -kąta; n – liczba boków n -kąta

$$P_n = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = 14$$

Zadanie 14. (1 pkt)

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2 \alpha$ jest równa

- A.** $\frac{25}{16}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{17}{16}$ D. $\frac{31}{16}$

roz. $2 - \cos^2 \alpha = 2 - (1 - \sin^2 \alpha) = 1 + \sin^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

Zadanie 15. (1 pkt)

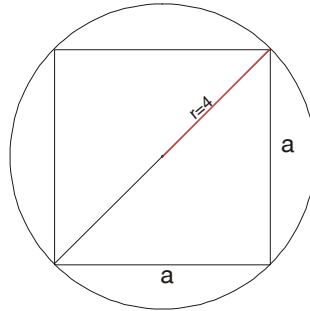
Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa.

- A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 8 D. 4

roz.

$r = 4$ - promień okręgu
 $d = 2r$ - przekątna kwadratu
 a - bok kwadratu

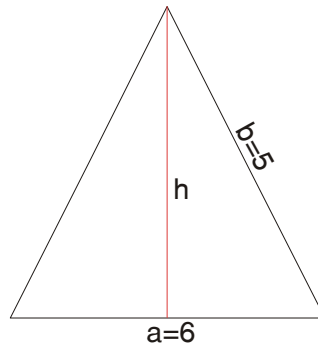
$$d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

**Zadanie 16. (1 pkt)**

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość

- A. 3 B. 4 C. $\sqrt{34}$ D. $\sqrt{61}$

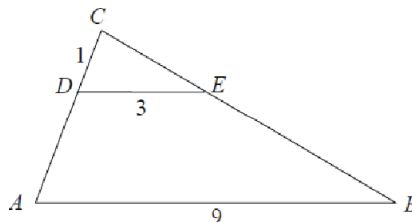
roz.



z twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4$

Zadanie 17. (1 pkt)

Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD , DE i AB są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka AD jest równa

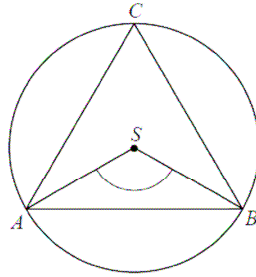


- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

roz. $\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|DE|}{|AB|} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{3}{9} \Rightarrow x = 2$

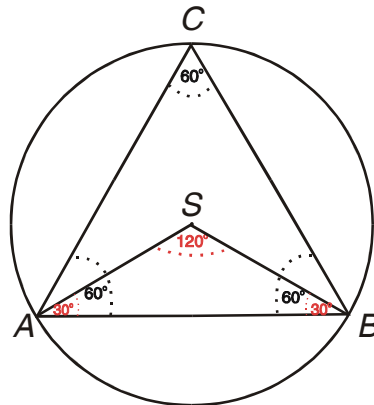
Zadanie 18. (1 pkt)

Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa



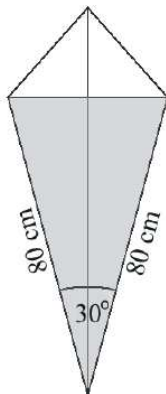
- A. 120° B. 90° C. 60° D. 30°

roz.



Zadanie 19. (1 pkt)

Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacięniowanego trójkąta jest równa



- A. 3200 cm^2
B. 6400 cm^2
 C. 1600 cm^2
D. 800 cm^2

roz.

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \Rightarrow P = \frac{1}{2} ab \sin 30^\circ$$

$$P = \frac{1}{2} * 80 * 80 * \frac{1}{2} = 1600$$

Zadanie 20. (1 pkt)

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy

- A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

Zadanie 21. (1 pkt)

Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2 + y^2 = 3$

B. $x^2 + y^2 = 6$

C. $x^2 + y^2 = 12$

D. $x^2 + y^2 = 36$

Zadanie 22. (1 pkt)Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Obwód tego trójkąta jest równy

A. 30

B. $4\sqrt{5}$

C. $12\sqrt{5}$

D. 36

roz. $Obw. = 3 \cdot a$ gdzie a – długość boku trójkąta

$$a = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(3 - (-5))^2 + ((-2) - 2)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$Obw. = 3 \cdot 4\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Zadanie 23. (1 pkt)Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe

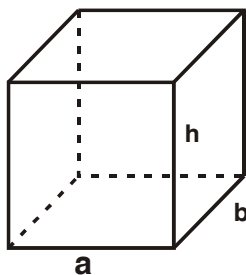
A. 94

B. 60

C. 47

D. 20

roz.



$$P_c = 2ab + 2bh + 2ah \Rightarrow P = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 4 = 94$$

Zadanie 24. (1 pkt)

Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

A. 11

B. 18

C. 27

D. 34

roz. n – ilość wierzchołków ostrosłupa, d – ilość krawędzi ostrosłupa

$$p = 2n - 2 \Rightarrow p = 2 \cdot 18 - 2 = 34$$

Zadanie 25. (1 pkt)Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3. Wtedy

A. $x = 2$

B. $x = 3$

C. $x = 4$

D. $x = 5$

roz.

$$\text{średnia arytmetyczna} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{x + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 1 + 4 + 1 + 5}{n} \Rightarrow x = 5$$

Zadanie 26. (2 pkt)Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$.

roz.

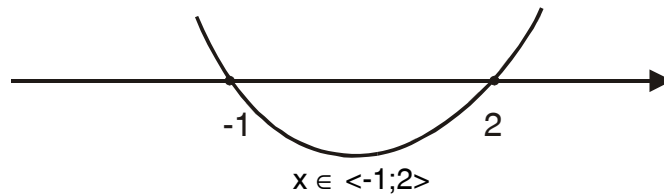
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a=1, b=-1, c=-2$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9, \Delta > 0 - \text{posiada dwa miejsca zerowe}$$

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 2, \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = -1$$

**Zadanie 27. (2 pkt)**Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

roz.

$$x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$$

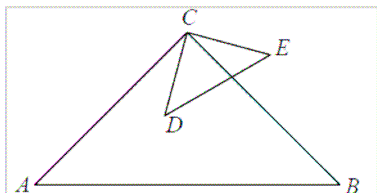
$$(x^3 - 7x^2) - 4(x+7) = 0$$

$$x^2(x-7) - 4(x+7) = 0$$

$$(x-7)(x^2-4) = 0$$

$$(x-7)(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_1=7, x_2=2, x_3=-2$$

Zadanie 28. (2 pkt)Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $AD = BE$.

roz.

 $|AC| = |CB|$ - trójkąt ABC jest równoramienny $|CD| = |CE|$ - trójkąt DEC jest równoramienny $\angle ACD = \angle BCE$ - i są równe różnicy 90° i miary $\angle DCE \Rightarrow \triangle ACD$ i $\triangle BCE$ są trójkątami przystającymi więc $|AD| = |BE|$.

Zadanie 29. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos \alpha$.

roz. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\cos \alpha = ?$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - (\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha)^2 = 1 - \left(\frac{5}{12} \cdot \cos \alpha\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{144} \cos^2 \alpha$$

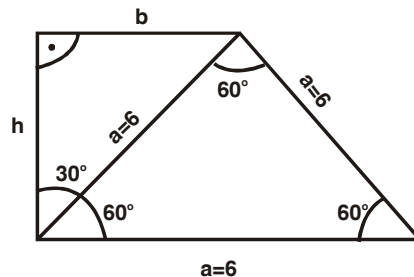
$$\cos^2 \alpha + \frac{25}{144} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

Zadanie 31. (2 pkt)

W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.



roz. $Obw = a + a + b + h$

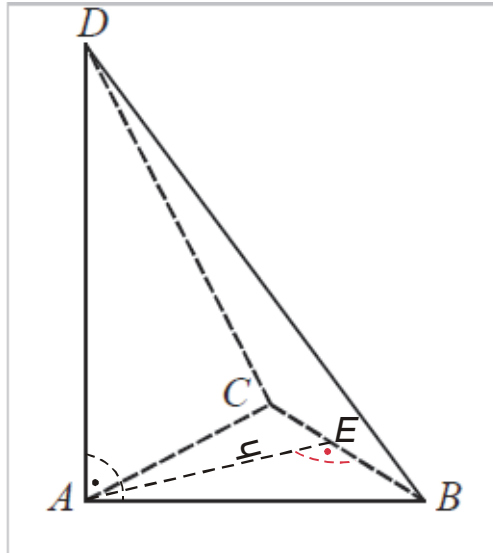
$$\sin 30^\circ = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sin 30^\circ, b = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$h^2 = a^2 - b^2, h^2 = 36 - 9 = 27, h = 3\sqrt{3}$$

$$Obw = 6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}$$

Zadanie 32. (4 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC . Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $AD=12$, $BC=6$, $BD=CD=13$.



roz. $V = \frac{S \cdot |AD|}{3}$, gdzie S – pole podstawy,

$$S = \frac{1}{2} h \cdot |BC|, \text{ gdzie } h \text{ – wysokość podstawy}$$

$$|\angle DAB| = 90^\circ \Rightarrow |BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2, \text{ z tw. Pitagorasa}$$

$$\Rightarrow |AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2, |AB|^2 = 169 - 144 = 25;$$

$$|AB| = 5$$

$$\triangle ACD = \triangle ABD \Rightarrow |AB| = |AC| = 4$$

obliczanie wysokości h $\triangle ABC$ z tw. Pitagorasa:

$$h^2 = |AB|^2 - |BE|^2, \text{ gdzie } \triangle ACD \text{ jest trójkątem}$$

$$\text{równoramiennym więc } |BE| = \frac{1}{2} |BC| = 3,$$

$$h^2 = 5^2 - 3^2, h = 4$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$$

$$V = \frac{12 \cdot 12}{3} = 48$$

Zadanie 33. (4 pkt)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

$$\text{roz. } |A| = \{(2,6), (4,3), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}, |\Omega| = 36$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Zadanie 34. (5 pkt)

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240m^2 . Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

$$\text{roz. } P_a = 240\text{m}^2 - \text{pole basenu w I hotelu}$$

$$P_b = 350\text{m}^2 - \text{pole basenu w II hotelu}$$

$$x - \text{długość basenu w I hotelu, } y - \text{szerokość basenu w I hotelu}$$

$$x+5 - \text{długość basenu w II hotelu, } y+2 - \text{szerokość basenu w II hotelu}$$

$$\begin{cases} xy = 240 \\ (x+5)(y+2) = 350 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 240 \\ xy + 2x + 5y + 10 = 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 240 \\ xy = 340 - 2x - 5y \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 240 \\ 240 - 2x - 5y = 340 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 240 \\ 2x + 5y = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 240 \\ y = 20 - \frac{2}{5}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(20 - \frac{2}{5}x) = 240 \\ y = 20 - \frac{2}{5}x \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{2}{5}x^2 + 20x - 240 = 0 \\ y = 100 - \frac{2}{5}x \end{cases}$$

$$\text{Rozwiązujemy równanie kwadratowe: } -\frac{2}{5}x^2 + 20x - 240 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 240 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + 4}{-\frac{2}{5}} = 20; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - 4}{-\frac{2}{5}} = 30$$

$$\begin{cases} x_1 = 20 \\ y_1 = 12 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_1 = 30 \\ y_1 = 8 \end{cases}$$